Teorie algoritmů — 9. týden

Marie Demlová
http://math.feld.cvut.cz/en/people/demlova

14. 4. 2026

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Vrcholové pokrytí

Úloha: Je dán prostý neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a číslo k.

Otázka: Existuje v grafu G vrcholové pokrytí o k vrcholech?

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

$$\text{nezávislé množiny } \lhd_p \text{ vrcholové pokrytí.}$$

Důsledek.

Protože problém vrcholového pokrytí patří do $\mathcal{NP}$, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Existence hamiltonovského cyklu

Úloha: Je dán orientovaný graf G.

Otázka: Existuje v grafu G hamiltonovský cyklus? (Jinými slovy, existuje v grafu G cyklus procházející všemi vrcholy?)

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

vrcholové pokrytí $\lhd_p$ existence hamiltonovského cyklu.

Důsledek.

Protože problém existence hamiltonovského cyklu patří do $\mathcal{NP}$, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

existence hamiltonovské kružnice $\lhd_p$ problém obchodního cestujícího.

Důsledek.

Protože problém obchodního cestujícího patří do $\mathcal{NP}$, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Další $\mathcal{NP}$ úplné úlohy

Tvrzení.

Platí

orientovaná hamilt. cesta $\lhd_p$ nejdelší (nejkratší) orient. cesta.

Důsledek.

Protože úloha nejdelší (nejkratší) orientované cesty patří do $\mathcal{NP}$, je to také $\mathcal{NP}$ úplná úloha.

Silně $\mathcal{NP}$-úplné úlohy

Příklad – celočíselný problém batohu.

Jsou dána kladná přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a K.

Otázka. Existují celá čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taková, že $x_i \geq 0$ pro každé i a platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, a_i = K.$$

Existuje algoritmus, který řeší celeočíselný problém batohu v čase $\mathcal{O}(nK)$.

Silně $\mathcal{NP}$-úplné úlohy

Číslo instance I, značíme ho $num(I)$, je největší číslo, které se v dané instanci vyskytuje.

Úloha $\mathcal{U}$ je silně $\mathcal{NP}$-úplná, jestliže existuje polynom $p(n)$ pro který je úloha, omezíme-li se pouze na instance I s $num(I) \leq p(n)$, stále $\mathcal{NP}$-úplná.

- Problém klik, problém existence hamiltonovské kružnice/cyklu, TSP jsou silně $\mathcal{NP}$-úplné úlohy.
- Subsetsum, problém batohu, dělení kořisti nejsou silně $\mathcal{NP}$-úplné úlohy.

Pseudopolynomíální algoritmus

Algoritmus $\mathcal{A}$ je pseudopolynomiální, jestliže existuje polynom p takový, že $\mathcal{A}$ řeší úlohu v čase $\mathcal{O}(p(n, num(I)))$.

Tvrzení.

Kdyby pro některou silně $\mathcal{NP}$-úplnou úlohu existoval pseudopolynomiální algoritmus, který ji řeší, tak $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Heuristky

Heuristika pro vrcholové pokrytí — 1.

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$. Výstup: Vrcholové pokrytí C grafu G.

begin
$C := \emptyset$
while $E \neq \emptyset$ do
vyber vrchol v s největším stupněm
$C := C \cup \{v\}$
odstraň z E hrany incidentní s v
end
return C

Heuristiky a aproximační algoritmy

Heuristika pro vrcholové pokrytí — 2.

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$. Výstup: Vrcholové pokrytí C grafu G.

`begin`
    $C := \emptyset$
        `while` $E \neq \emptyset$ `do`
            vyber hranu $\{u, v\}$
            $C := C \cup \{u, v\}$
            odstraň z E všechny hrany incidentní s vrcholy u, v
`end`
`return` C

Heuristiky a aproximační algoritmy

Tvrzení.

Označme C_{min} vrcholové pokrytí G s nejmenším počtem vrcholů. Pak druhá heuristika najde vrcholové pokrytí C takové, že

$$|C| \leq 2\,|C_{min}|.$$

Přípustné řešení, které dostaneme některým heuristickým algoritmem, může být „velmi daleko“ od optima.

Příklad: Algoritmus sekvenčního barvení.

Aproximační algoritmy

Definice.

Je dána optimalizační úloha $\mathcal{U}$ s účelovou funkcí c. Polynomiální algoritmus $\mathcal{A}$ je aproximační algoritmus pro $\mathcal{U}$, jestliže existuje reálné číslo R tak, že pro každou instanci I algoritmus $\mathcal{A}$ najde přípustné řešení $\mathcal{A}(I)$ s hodnotou účelové funkce ne horší než R krát hodnota účelové funkce optimálního řešení.

Algoritmus $\mathcal{A}$ se také nazývá R-aproximační algoritmus.

Heuristiky a aproximační algoritmy

Tvrzení.

Kdyby existovala konstanta R a polynomiální R-aproximační algoritmus $\mathcal{A}$ pro úlohu TSP, pak

$$\mathcal{P} = \mathcal{NP}.$$

Věta.

Když se omezíme pouze na instance TSP, které splňují trojúhelníkovou nerovnost, pak existuje 2-aproximační algoritmus řešící tyto instance.