

Teorie algoritmů — 7. týden

Marie Demlová

<http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova>

31. 3. 2026

Rozhodovací úlohy a jazyky

Rozhodovací úlohy

Rozhodovací úloha/problém je taková úloha, jejímž „řešením“ je buď odpověď „ANO“ nebo odpověď „NE“.

Příklady

- ▶ SAT — splňování Booleovských formulí (v CNF).
- ▶ Existence Hamiltonovské cesty/cyklu/kružnice.
- ▶ Je možné obarvit graf 3 barvami?

Rozhodovací úlohy a jazyky

Rozhodovací verze optimalizačních problémů.

Pro každý optimalizační problém vytvoříme jeho rozhodovací verzi např. takto:

- ▶ Je dán souvislý neorientovaný graf G spolu s délkami hran $a: E \rightarrow \mathbb{Z}$. Je dáno přirozené číslo K . Existuje kostra G délky nejvýše K ?
- ▶ Je dána instance TSP a přirozené číslo K . Existuje trasa délky nejvýše K ?

Rozhodovací úlohy a jazyky

Věta.

Kdyby existoval polynomiální algoritmus \mathcal{A} , který řeší rozhodovací verzi TSP, pak také existuje polynomiální algoritmus, který řeší optimalizační verzi TSP.

Rozhodovací úlohy a jazyky

Rozhodovací úlohy a jazyky.

Je dán rozhodovací úloha \mathcal{U} . Všechny instance této úlohy rozdělíme do dvou skupin — **ANO** instance a **NE** instance.

Instance úlohy je možné zakódovat jako slovo nad vhodnou abecedou Σ . Jazyk

$$L_{\mathcal{U}} = \{w \mid w \text{ je kód ANO instance}\}$$

je **jazyk úlohy \mathcal{U}** .

Slova nad Σ , které neodpovídají žádné instanci úlohy, považujeme za NE instance.

Třídy složitosti

Třída \mathcal{P} .

Rozhodovací úloha U patří do třídy \mathcal{P} právě tehdy, když existuje deterministický Turingův stroj M , který přijímá jazyk L_U a pracuje s polynomiální časovou složitostí.

Příklady.

- ▶ Rozhodovací verze problému minimální kostry.
- ▶ Rozhodovací verze úlohy nalezení nejkratších cest v ohodnoceném grafu bez cyklů záporné délky.
- ▶ Rozhodovací verze nalezení maximálního toku v síti.
- ▶ Rozhodovací verze úlohy nalezení minimálního řezu.

Třídy složitosti

Třída \mathcal{NP} .

Rozhodovací úloha \mathcal{U} patří do třídy \mathcal{NP} právě tehdy, když existuje nedeterministický Turingův stroj M , který přijímá jazyk $L_{\mathcal{U}}$ a pracuje s polynomiální časovou složitostí.

Příklady.

- ▶ SAT problém.
- ▶ Existence hamiltonovské cesty/kružnice, hamiltonovského cyklu.
- ▶ Rozhodovací verze problému batohu.
- ▶ Rozhodovací verze problému klik.

Třídy složitosti

Nedeterministický „algorithmus“.

Nedeterministický algoritmus se skládá ze dvou fází

- ▶ v první fázi se vygeneruje řetězec s ;
- ▶ na základě vstupní instance a a na základě s (deterministický) algoritmus dá odpověď buď „ano“ nebo „ne“.

Nedeterministický algoritmus **řeší** úlohu, jestliže

- 1) pro každou ANO instanci existuje řetězec s , pro který druhá fáze odpoví ano;
- 2) pro žádnou NE instanci neexistuje řetězec s , pro který druhá fáze odpoví ano.

Nedeterministický algoritmus **pracuje v čase** $\mathcal{O}(T(n))$, jestliže každý průchod oběma fázemi 1 a 2 pro instanci velikosti n potřebuje $\mathcal{O}(T(n))$ kroků.

Třída \mathcal{NPC} **Redukce a polynomiální redukce úloh.**

Jsou dány dvě rozhodovací úlohy \mathcal{U} a \mathcal{V} . Řekneme, že úloha \mathcal{U} se **redukuje** na úlohu \mathcal{V} , jestliže existuje algoritmus (program pro počítač, Turingův stroj) M , který pro každou instanci I úlohy \mathcal{U} zkonstruuje instanci I' úlohy \mathcal{V} a to tak, že

I je ANO-instance \mathcal{U} právě tehdy, když I' je ANO-instance \mathcal{V} .

Značíme to

$$\mathcal{U} \triangleleft \mathcal{V}.$$

Jestliže M pracuje s polynomiální časovou složitostí, \mathcal{U} se **polynomiálně redukuje** na \mathcal{V} , a píšeme

$$\mathcal{U} \triangleleft_p \mathcal{V}.$$

Třída \mathcal{NPC}

Tvrzení. Jsou dány tři rozhodovací úlohy \mathcal{U} , \mathcal{V} a \mathcal{W} . Jestliže platí

$$\mathcal{U} \triangleleft_p \mathcal{V} \quad \text{a} \quad \mathcal{V} \triangleleft_p \mathcal{W},$$

pak

$$\mathcal{U} \triangleleft_p \mathcal{W}.$$

Třída \mathcal{NPC}

\mathcal{NP} úplné úlohy.

Rozhodovací úloha \mathcal{U} je \mathcal{NP} úplná jestliže

1. \mathcal{U} patří do třídy \mathcal{NP} ;
2. každá \mathcal{NP} úloha se polynomiálně redukuje na \mathcal{U} .

\mathcal{NPC} je třída všech \mathcal{NP} úplných úloh.

Tvrzení.

Jsou dány dvě \mathcal{NP} úlohy \mathcal{U} a \mathcal{V} , pro které platí $\mathcal{U} \triangleleft_p \mathcal{V}$. Pak

1. jestliže \mathcal{V} je v \mathcal{P} , pak také \mathcal{U} je v \mathcal{P} ;
2. jestliže \mathcal{U} je \mathcal{NP} úplná úloha, pak také \mathcal{V} je \mathcal{NP} úplná úloha.

Třída \mathcal{NPC}

Věta.

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}.$$

Zda $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ otevřená otázka.

Tvrzení.

Kdyby některá \mathcal{NP} úplná úloha patřila do třídy \mathcal{P} (tj. byla by polynomiálně řešitelná), pak $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Třída \mathcal{NPC}

Cookova věta.

SAT je \mathcal{NP} úplná úloha.

Třída \mathcal{NP} **Důkaz.**

1) SAT patří do \mathcal{NP} .

2) Musíme ukázat, že každá \mathcal{NP} úloha se polynomiálně redukuje na SAT. Protože $\mathcal{V} \in \mathcal{NP}$ iff existuje NTM M přijímající $L_{\mathcal{V}}$ v polynomiálním čase $p(n)$, stačí:

Pro libovolný NTM M a slovo w zkonstruujeme formuli $\varphi_{M,w}$ takovou, že

M přijímá w právě tehdy, když $\varphi_{M,w}$ je splnitelná.

Třída NP

Podmínky, které $\varphi_{M,w}$ musí splňovat:

- 1) V čase i , $i = 0, \dots, p(n)$, je NTM M v právě jednom stavu.
- 2) V čase i , $i = 0, \dots, p(n)$, hlava M čte právě jedno pole pásky.
- 3) V čase i , $i = 0, \dots, p(n)$, každé pole pásky obsahuje právě jeden páskový symbol.
- 4) Na začátku práce M (tj. v čase 0), M je v počátečním ID.
- 5) Každý krok M je určen δ ; tj. stav M v čase $i + 1$, obsah čteného pole, a pole které M čte v čase $i + 1$ je určeno δ .
- 6) Obsah pole pásky, které M nečte v čase i zůstávají stejné i v čase $i + 1$.
- 7) Je-li M v čase i ve stavu q_f , je ve stavu q_f i v čase $i + 1$.
- 8) V čase $p(n)$ je M ve stavu q_f .

Třída \mathcal{NPC} **Logické proměnné $\varphi_{M,w}$.**

- ▶ s_i^q , $i = 0, 1, \dots, p(n)$, $q \in Q$;
to, že s_i^q je pravdivá znamená, že v čase i je M ve stavu q .
- ▶ $h_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots, p(n)$, $j = 1, 2, \dots, p(n)$;
to, že $h_{i,j}$ je pravdivá znamená, že M v čase i čte j -té políčko pásy.
- ▶ $t_{i,j}^A$, $i = 0, 1, \dots, p(n)$, $j = 1, 2, \dots, p(n)$, $A \in \Gamma$;
to, že $t_{i,j}^A$ je pravdivá znamená, že v čase i je pásce v j -tém políčku symbol A .

Třída \mathcal{NPC} **Podmínky, které $\varphi_{M,w}$ musí splňovat:**

- 1) V čase i , $i = 0, \dots, p(n)$, se NTM M nachází v právě jednom stavu.
- 2) V čase i , $i = 0, \dots, p(n)$, hlava M čte právě jedno pole pásky.
- 3) V čase i , $i = 0, \dots, p(n)$, každé pole pásky obsahuje právě jeden páskový symbol.
- 4) Na začátku práce M (tj. v čase 0), M je v počátečním ID.
- 5) Každý krok M je určen δ ; tj. stav M v čase $i + 1$, obsah čteného pole, a pole, které M čte v čase $i + 1$ je určeno δ .
- 6) Obsah pole pásky, které M nečte v čase i zůstává stejné i v čase $i + 1$.
- 7) Je-li M v čase i ve stavu q_f , je ve stavu q_f i v čase $i + 1$.
- 8) V čase $p(n)$ je M ve stavu q_f .