

Teorie algoritmů — 6. týden

Marie Demlová

<http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova>

24. 3. 2026

Techniky pro návrh Turingova stroje

▶ informace pamatovaná stavem

▶ více stop

Turingovy stroje s více páskami

Neformální popis.

Turingův stroj s k páskami se skládá z:

- ▶ řídící jednotky, která se může nacházet v jednom z konečně mnoha stavů,
- ▶ k potenciálně nekonečných pásek rozdělených do políček, každé políčko z nich obsahuje jeden páskový symbol a
- ▶ z k hlav, které čtou obsah políčka odpovídající pásky, a přepisují obsah políčka.

Na základě k páskových symbolů X_1, \dots, X_k , stavu q řídící jednotky, TM změní svůj stav na p , zapíše páskové symboly Y_1, \dots, Y_k do čtených polí odpovídajících pásek a posune hlavy (nezávisle) doprava nebo doleva. Tato změna je určena přechodovou funkcí δ .

Turingovy stroje s více páskami

Formální definice.

TM je sedmice $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, kde

- ▶ Q je konečná neprázdná množina stavů,
- ▶ Σ je konečná neprázdná množina vstupních symbolů (vstupů),
- ▶ Γ je konečná množina páskových symbolů, kde $\Sigma \subset \Gamma$,
- ▶ B je blank *blank*, speciální symbol znamenající, že políčko pásky je prázdné; $B \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- ▶ δ je přechodová funkce, tj. parciální zobrazení $(Q \setminus F) \times \Gamma^k$ into $Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$, (zde L znamená pohyb hlavy doleva, R pohyb hlavy doprava),
- ▶ $q_0 \in Q$ je počáteční stav a
- ▶ $F \subseteq Q$ je množina koncových (akceptujících) stavů.

Turingovy stroje s více páskami

Počáteční ID

Na začátku práce TM nad vstupním slovem $w \in \Sigma^*$, $w = a_1 \dots a_n$

- ▶ TM je ve stavu q_0 ,
- ▶ první páska obsahuje $a_1 \dots a_n$ v n po sobě následujících políček, ostatní políčka obsahují B , ostatní pásy obsahují pouze B ,
- ▶ hlava čte a_1 .

Turingovy stroje s více páskami

Krok Turingova stroje s k páskami

Je-li přechodová funkce definovaná, pak (na základě δ):

- ▶ řídicí jednotka změní stav;
- ▶ každá hlava změní obsah políčka, které čte odpovídající čtecí hlava;
- ▶ každá hlava se nezávisle posune buď o jedno políčko doleva nebo doprava.

Turingovy stroje s více páskami

Turingův stroj s k páskami

se **úspěšně zastaví** nad slovem $w \in \Sigma^*$, jestliže se při práci dostane do ID s koncovým stavem $q_f \in F$.

se **neúspěšně zastaví** nad slovem $w \in \Sigma^*$ jestliže se při práci dostane do ID, ve kterém není definována přechodová funkce ve stavu $q \notin F$.

Slovo $w \in \Sigma^*$ je **přijímáno** TM M , jestliže během práce nad w se M úspěšně zastaví.

Turingovy stroje s více páskami

- ▶ Množina všech slov přijímaných Turingovým strojem M se nazývá **jazyk přijímaný M** a značíme ho $L(M)$.
- ▶ Navíc, jestliže M se zastaví na každém vstupním slově $w \in \Sigma^*$, pak říkáme, že $L(M)$ je **rozhodován M** .

Turingovy stroje s více páskami

Věta 1.

Ke každému Turingovu stroji M_1 s k páskami existuje Turingův stroj M_2 s jednou páskou takový, že přijímá/rozhoduje stejný jazyk jako M_1 .

Věta 2.

Turingův stroj M_2 z věty 1 simuluje n kroků Turingova stroje M_1 v $\mathcal{O}(n^2)$ krocích.

Nedeterministický Turingův stroj – NTM

Definice.

Nedeterministický TM (NTM) se skládá z

- ▶ konečné množiny stavů Q ,
- ▶ konečné množiny vstupních symbolů Σ ,
- ▶ konečné množiny páskových symbolů Γ , kde $\Sigma \subset \Gamma$,
- ▶ prázdného symbolu B — blank, $B \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- ▶ přechodové funkce δ — zobrazení $(Q \setminus F) \times \Gamma$ do množiny $\mathcal{P}_f(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$
($\mathcal{P}_f(X)$ je množina konečných podmnožin X),
- ▶ počátečního stavu $q_0 \in Q$ a
- ▶ množiny koncových/akceptujících stavů $F \subseteq Q$.

Nedeterministický Turingův stroj – NTM

Krok NTM je definován:

Předpokládejme, že $(p, Y, R) \in \delta(q, X_i)$, pak

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i \dots X_k \vdash X_1 X_2 \dots X_{i-1} Y p X_{i+1} \dots X_k. \quad (1)$$

Předpokládejme, že $(p, Y, L) \in \delta(q, X_i)$, pak

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i \dots X_k \vdash X_1 \dots X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} \dots X_k. \quad (2)$$

Nedeterministický Turingův stroj – NTM

Jazyk L přijímaný NTM se skládá za všech slov $w \in \Sigma^*$ pro která

$$q_0 w \vdash^* \alpha q_f \beta,$$

kde $q_f \in F$ a $\alpha, \beta \in \Gamma^*$ (kde \vdash^* je reflexivní a tranzitivní uzávěr \vdash).

Jestliže NTM M přijímá jazyk L a navíc platí, že každý výpočet M nad libovolným vstupním slovem se zastaví po konečně mnoha krocích, říkáme, že M rozhoduje jazyk L .

Nedeterministický Turingův stroj – NTM

Časová složitost NTM je parciální zobrazení $T(n)$ definované:

Jestliže pro nějaký vstup délky n se některý výpočet NTM nezastaví, $T(n)$ není definováno. Jinak je $T(n)$ maximální počet kroků, po nichž se NTM zastaví, kde maximum se bere přes všechny vstupy délky n a všechny výpočty nad těmito slovy.

Paměťová složitost NTM je parciální zobrazení $S(n)$. definované:

Jestliže pro nějaký vstup délky n Turingův stroj použije nekonečnou část pásky, $S(n)$ není definováno. Jinak je $S(n)$ největší rozdíl pořadových čísel polí, které byly během výpočtu použity, kde maximum se bere přes všechny vstupy délky n a všechny výpočty nad těmito slovy.

Nedeterministický Turingův stroj – NTM

Věta.

Pro každý nedeterministický Turingův stroj M existuje deterministický Turingův stroj M_1 takový, že $L(M) = L(M_1)$.

Realistický model počítače

Model počítače

1. **Paměť** se skládá z potenciálně nekonečného počtu *slov*, každé má *adresu*.
2. **Program** je uložen v některých slovech paměti. Každé slovo — jednoduchá instrukce. Přípouštíme nepřímé adresování.
3. Každá instrukce obsahuje omezený počet slov a mění obsah nejvýše jedné adresy.

Příklady instrukcí: copy, add (hodnotu jedné buňky k hodnotě jiné buňky), jump a pod.

Nedeterministický Turingův stroj – NTM

Věta 1. Ke každému Turingovu stroji M existuje program P takový, že oba mají stejné chování. Navíc, jestliže M potřeboval n kroků, P má časovou složitost $\mathcal{O}(n^2)$.

Věta 2. Pro každý program P existuje Turingův stroj M s pěti páskami takový, že P i M mají stejné chování.

Nedeterministický Turingův stroj – NTM

Věta 3. Jestliže program P splňuje následující podmínky:

- ▶ program obsahuje pouze instrukce, které zvětšují délku binárně zapsaného čísla maximálně o jednu;
- ▶ program obsahuje pouze instrukce, které Turingův stroj s více páskami provede na slovech délky k v $\mathcal{O}(k^2)$ krocích,

pak Turingův stroj z věty 2 simuluje n kroků programu P pomocí $\mathcal{O}(n^3)$ svých kroků.

Důsledek. Je dán program P , který splňuje podmínky z předchozí věty. Pak existuje Turingův stroj s jednou páskou, který má stejné chování jako P a n kroků programu P simuluje pomocí $\mathcal{O}(n^6)$ svých kroků.