Teorie algoritmů — 4. týden

Marie Demlová
http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova

10. 3. 2026

Minimální kostra

Obecné schema

Vstup: Souvislý graf $G = (V, E)$, $a\colon E \to \mathbb{Z}$.

Výstup: hrany minimální kostry K.

1. (Inicializace.)
   $K := \emptyset$, $\mathcal{S} = \{\{v\} \mid v \in V\}$;
2. (Výběr hrany.)
   Dokud $\mathcal{S}$ není jednoprvková
   - vybereme hranu $e \in E \setminus K$ tak, že
     - vede mezi dvěma množinami z $\mathcal{S}$, $C_1 \neq C_2$,
     - a aspoň pro jednu je nejlevnější hrana vedoucí z ní.
3. (Úpravy.)
   $K := K \cup \{e\}$;
   $\mathcal{S} := (\mathcal{S} \setminus \{C_1, C_2\}) \cup \{C_1 \cup C_2\}$.

Minimální kostra

Variant — počet prvků v množině $\mathcal{S}$.

Hranu je možné přidat pouze $n - 1$ krát; pak $\mathcal{S}$ je jednoprvková.

Invariant

Množina K je vždy částí některé minimální kostry.

Tvrzení. Jestliže množina hran K před vykonáním kroku 2 je částí některé minimální kostry a vybereme-li hranu e podle schematu, pak množina hran $K \cup \{e\}$ je také částí některé minimální kostry.

Nejkratší cesty

$G = (V, E)$ – prostý orientovaný graf s ohodnocením $a\colon E \to \mathbb{Z}$.
Označme $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ množinu vrcholů G.

Matice délek A

$$a(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{pro } i = j \\ a(e), & \text{pro } e = (i,j) \in E \\ \infty, & \text{pro } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Nejkratší cesty

Matice vzdáleností U

$$u(i,j) = \begin{cases} 0, \quad \text{pro } i = j, \\ \text{délka nejkratší cesty z } i \text{ do } j, \text{ existuje-li cesta z } i \text{ do } j \\ \infty, \quad \text{neexistuje-li cesta z } i \text{ do } j \end{cases}$$

Nejkratší cesty

Předpokládejme, že v grafu G je vrchol y orientovaně dostupný z vrcholu x. Pak platí:

1. Jestliže graf G obsahuje pouze cykly kladné délky (tj. neobsahuje ani cykly záporné délky ani nulové délky), pak nejkratší sled z vrcholu x do vrcholu y existuje a je současně nejkratší cestou z x do y.

2. Jestliže v grafu G neexistuje cyklus záporné délky, pak nejkratší sled z x do y má stejnou délku jako nejkratší cesta z x do y.

3. Jestliže v grafu G neexistuje cyklus záporné délky, pak pro každý sled C z x do y existuje cesta z x do y, která je kratší nebo stejně dlouhá jako sled C.

Nejkratší cesty

Trojúhelníková nerovnost

Jestliže graf G neobsahuje cyklus záporné délky, pak pro každé tři vrcholy x, y, z platí

$$u(x,y) \leq u(x,z) + u(z,y).$$

Bellmanův princip optimality

Jestliže graf G neobsahuje cyklus záporné délky, pak pro každé dva různé vrcholy x, y platí

$$u(x,y) = \min_{z \neq y}(u(x,z) + a(z,y)).$$

Nejkratší cesty z r

Obecné schema.

Vstup: Orientovaný graf $G = (V, E)$ bez cyklů záporné délky, vrchol r, ohodnocení $a\colon E \to \mathbb{Z}$.

Výstup: Hodnoty $U(v)$, které jsou $u(r, v)$.

1. (Inicializace.)
   $U(r) := 0$, $U(v) := \infty$ pro $v \neq r$;
2. (Zpracování hran.)
   Existuje-li hrana $e = (v, w)$ taková, že
   $U(w) > U(v) + a(e)$
   položíme $U(w) := U(v) + a(e)$.
3. (Ukončení.)
   Je-li $U(w) \leq U(v) + a(e)$ pro každou hranu $e = (v, w)$, stop.
   Jinak pokračuj krokem 2.

Nejkratší cesty z r

Tvrzení.

Jestliže G neobsahuje cyklus záporné délky a $U(v) \neq \infty$, pak $U(v)$ je délka nějaké cesty z r do v.

Věta. Jestliže G neobsahuje cyklus záporné délky a hodnoty $U(v)$ byly spočítány podle obecného schematu, který skončil, pak $U(v) = u(r, v)$.

Nejkratší cesty z r

Algoritmus 1.

Vstup: Ohodnocený orientovaný graf bez cyklů záporné délky, r.
Výstup: $U(v) = u(r, v)$.

1. (Inicializace.)
   $U(r) := 0$, $U(v) := \infty$ pro $v \neq r$
2. (Zpracování hran.)
   Pro každou hranu $e \in E$ provedeme
   jestliže $U(KV(e)) > U(PV(e)) + a(e)$
   pak $U(KV(e)) := U(PV(e)) + a(e)$
3. (Ukončení.)
   Jestliže v kroku 2 se nezmění $U(v)$, stop a vrátíme $U(v)$.
   Jinak pokračujeme krokem 2.

Nejkratší cesty z r

Algoritmus 2.

Vstup: Ohodnocený orientovaný graf bez cyklů záporné délky, r.
Výstup: $U(v) = u(r, v)$.

1. (Inicializace.)
   $U(r) := 0$, $U(v) := \infty$ pro $v \neq r$; $M := \{r\}$
2. (Zpracování hran.)
   Dokud $M \neq \emptyset$, vyber $x \in M$;
   $M := M \setminus \{x\}$
   pro každou hranu e s $PV(e) = x$ provedeme
   jestliže $U(KV(e)) > U(x) + a(e)$
   pak $U(KV(e)) := U(x) + a(e)$; $M := M \cup \{KV(e)\}$
3. (Ukončení.)
   vrátíme $U(v)$; stop

Nejkratší cesty z r

Strategie pro výběr hrany e

- Množina M je FIFO.
- Vyber vrchol $v \in M$ s nejmenší hodnotou $U(v)$.

Příklad.

Je dán orientovaný ohodnocený graf tabulkou

PV	1	1	2	2	3	4	5	5	5	5
KV	2	5	4	5	2	3	1	2	3	4
a	3	4	2	2	-5	4	6	-2	6	0

Najděme nejkratší cesty z vrcholu 1.

Nejkratší cesty mezi všemi dvojicemi vrcholů.

Floydův algoritmus.

Označme $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Floydův algoritmus (také Floyd-Warshallův algoritmus) konstruuje matice $\mathrm{U}_k = (u_k(i,j))$ řádu n, $k = 0, 1, \ldots, n$ s těmito vlastnostmi:

$$u_k(i,j) = d,$$

kde d je délka nejkratší cesty z i do j, která obsahuje vnitřní vrcholy pouze mezi $1, 2, \ldots, k$. Nebo

$$u_k(i,j) = \infty,$$

jestliže neexistuje taková cesta.

Nejkratší cesty mezi všemi dvojicemi vrcholů.

Tvrzení.

Platí

1. U_0 je matice délek A.
2. U_n je matice vzdáleností U.
3. Matice U_{k+1} vznikne z U_k takto:

$$u_{k+1}(i,j) = \min\{u_k(i,j), u_k(i,k+1) + u_k(k+1,j)\}.$$

Nejkratší cesty mezi všemi dvojicemi vrcholů.

Floydův algoritmus

Vstup: matice délek A.
Výstup: matice vzdáleností M = U.

1. M := A
2. begin
   for $k = 1, 2, \dots, n$ do
     for $i = 1, 2, \dots, n$ do
       for $j = 1, 2, \dots, n$ do
         begin
           if $M(i, j) > M(i, k) + M(k, j)$ then
             $M(i, j) = M(i, k) + M(k, j)$
         end
   end