

Teorie algoritmů — 2. týden

Marie Demlová

<http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova>

24. 2. 2026

Řešení rekursivních vztahů

Základní metoda.

Vychází z teorie řešení diferenčních rovnic.

Příklad. Hanoiské věže:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1.$$

Metoda založená na odhadu.

Odhadneme růst a pak dokazujeme matematickou indukci.

Příklad.

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n.$$

Řešení rekursivních vztahů

Rekursivní stromy.

Další metoda využívá rekursivní stromy. Používá se buď k přímému výpočtu, častěji k nalezení co „nejtěsnějšího“ odhadu (který pak dokazujeme indukcí).

Příklad 1. Řešme rekurentní vztah

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2.$$

Příklad 2. Řešme rekurentní vztah

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n.$$

Master Theorem

Věta — „Master Theorem“.

Jsou dána přirozená čísla $a \geq 1$, $b > 1$ a nezáporná funkce $f(n)$. Předpokládejme, že funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem

$$T(n) = a T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde $\frac{n}{b}$ znamená buď $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{b} \rceil$.

1. Jestliže $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$, pak $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Jestliže $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. Jestliže $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pro nějakou konstantu $\varepsilon > 0$ a jestliže $a f(\frac{n}{b}) \leq c f(n)$ pro nějakou konstantu $c < 1$ pro všechna dostatečně velká n , pak $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Master Theorem

Lemma 1. Za předpokladů MT platí

$$T(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) + h(n),$$

kde $h(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$.

Lemma 2. Pro $g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$ platí:

1. Je-li $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pro $\varepsilon > 0$, pak $g(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b a})$.
2. Je-li $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $g(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. Je-li $a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$ pro $c < 1$, pak $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Řešení rekursivních vztahů

Tvrzení.

Jsou dána přirozená čísla $a \geq 1$, $b > 1$ a nezáporná funkce $f(n)$. Předpokládejme, že funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem

$$T(n) = a T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

kde $\frac{n}{b}$ znamená buď $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{b} \rceil$.

Jestliže $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ pro $k \geq 0$, pak pro funkci $T(n)$ platí:

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n).$$

Řešení rekursivních vztahů

Příklad špatné indukce.

Základní krok: Pro $n = 1$ platí $1 \in \mathcal{O}(1)$.

Indukční krok: Předpokládejme, že $\sum_{i=1}^n i \in \mathcal{O}(n)$. Pak

$$f(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i = \left(\sum_{i=1}^n i \right) + (n+1) \in \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n) \quad \text{tedy i v } \mathcal{O}(n).$$

Co je špatně na tomto důkazu?