

Teorie algoritmů — 1. týden

Marie Demlová

<http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova>

17. 2. 2026

Úvod

Teorie algoritmů

Co je obsahem předmětu?

- ▶ asymptotický růst funkcí, složitost algoritmů a jejich výpočet, správnost algoritmů
- ▶ Turingovy stroje
- ▶ třídy složitosti založené na časové složitosti
- ▶ porovnávání složitosti úloh – redukce
- ▶ třídy složitosti založené na paměťové složitosti
- ▶ pravděpodobnostní třídy složitosti
- ▶ algoritmická neřešitelnost / nerozhodnutelnost

Úvod

Proč chodit na přednášky?

Je možné aktivně ovlivnit přednášku - dotazy, několik možností vysvětlení látky.

Přednášky budou streamovány.

Informace

Moodle – hlavní zdroj

Webová stránka <http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova/tal>

Úvod

Zápočet

- ▶ cvičení nejsou povinná kromě cvičení, na kterých se píše dva testy – tj. cvičení v 6. a 9. týden semestru
- ▶ v případě, že se student cvičení nezúčastní, musí odevzdat aspoň jeden příklad z domácí přípravy na to cvičení, na kterém nebude přítomen
- ▶ **na cvičení** se píše dva testy — max. 15 a 20 bodů — jsou součástí závěrečné zkoušky

Úvod

Zkouška

- ▶ třetí část písemné zkoušky se píše ve zkouškovém období — max. 35 bodů
- ▶ ze všech tří částí je třeba získat aspoň 35 bodů, ze kterého musí získat aspoň 15 bodů, jinak hodnocení F.
- ▶ ústní zkouška je **povinná** a je možné získat max. 30 bodů.

Úvod

Algoritmus

Algotmem rozumíme dobře definovaný proces, tj. posloupnost výpočetních kroků, který přijímá hodnoty (zadání, vstup) a vytváří hodnoty (řešení, výstup).

Problém, úloha

Úloha, též **problém**, je obecná specifikace vztahu zadání/řešení.

Instancí problému, úlohy \mathcal{U} rozumíme konkrétní zadání všech parametrů, které daná úloha (problém) obsahuje. Jinými slovy, instance úlohy je správný příklad zadání.

Řekneme, že algoritmus \mathcal{A} **řeší** úlohu \mathcal{U} , jestliže pro každý vstup (každou instanci problému \mathcal{U}) vydá správné řešení.

Úvod

Analýza časové složitosti algoritmu

1. Analýza nejhorsího případu. Jedná se o asymptotický odhad $T(n)$ času potřebného pro vyřešení každé instance velikosti n .
2. Průměrná složitost. Jedná se o asymptotický odhad $T_{aver}(n)$ průměrného času, který je potřeba pro vyřešení instance velikosti n .
3. Amortizovaná složitost je asymptotický odhad průměru nejhorsího případu pro n po sobě následujících instrukcí/operací.

Asymptotický růst funkcí

Symbol \mathcal{O}

Je dána nezáporná funkce $g(n)$. Řekneme, že nezáporná funkce $f(n)$ je $\mathcal{O}(g(n))$, jestliže existuje kladná konstanta c a přirozené číslo n_0 tak, že

$$f(n) \leq c g(n) \quad \text{pro všechny } n \geq n_0.$$

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, n_0 \text{ tak, že } f(n) \leq c g(n) \quad \forall n \geq n_0\}.$$

Asymptotický růst funkcí

Symbol Ω

Je dána nezáporná funkce $g(n)$. Řekneme, že nezáporná funkce $f(n)$ je $\Omega(g(n))$, jestliže existuje kladná konstanta c a přirozené číslo n_0 tak, že

$$f(n) \geq c g(n) \quad \text{pro všechny } n \geq n_0.$$

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, n_0 \text{ tak, že } f(n) \geq c g(n) \quad \forall n \geq n_0\}.$$

Asymptotický růst funkcí

Symbol Θ

Je dána nezáporná funkce $g(n)$. Řekneme, že nezáporná funkce $f(n)$ je $\Theta(g(n))$, jestliže existují kladné konstanty c_1 , c_2 a přirozené číslo n_0 tak, že

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \quad \text{pro všechny } n \geq n_0.$$

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0, n_0 \ c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \ \forall n \geq n_0\}.$$

Platí

- ▶ $f(n)$ je $\Theta(g(n))$ právě tehdy, když $f(n)$ je zároveň $\mathcal{O}(g(n))$ a $\Omega(g(n))$.
- ▶ $f(n)$ je $\Theta(g(n))$ právě tehdy, když $g(n)$ je $\Theta(f(n))$.

Asymptotický růst funkcí

Symbol malé o .

Je dána nezáporná funkce $g(n)$. Řekneme, že nezáporná funkce $f(n)$ je $o(g(n))$, jestliže pro každou kladnou konstantu c existuje přirozené číslo n_0 tak, že

$$0 \leq f(n) < c g(n) \quad \text{pro všechny } n \geq n_0.$$

$$o(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0 \exists n_0 \text{ tak že } 0 \leq f(n) < c g(n) \quad \forall n \geq n_0\}.$$

Asymptotický růst funkcí

Symbol malé ω

Je dána nezáporná funkce $g(n)$. Řekneme, že nezáporná funkce $f(n)$ je $\omega(g(n))$, jestliže pro každou kladnou konstantu c existuje přirozené číslo n_0 tak, že

$$0 \leq c g(n) < f(n) \quad \text{pro všechny } n \geq n_0.$$

$$\omega(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0 \exists n_0 \text{ tak že } f(n) > c g(n) \quad \forall n \geq n_0\}.$$

Asymptotický růst funkcí

Tvrzení. Jsou dány dvě nezáporné funkce $f(n)$ a $g(n)$. Pak platí

- ▶ $f(n) \in o(g(n))$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$;
- ▶ $f(n) \in \omega(g(n))$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.
- ▶ Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak $f(n) \in \Theta(g(n))$.

Asymptotický růst funkcí

Tranzitivita. Máme dány tři nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$.

- ▶ Jestliže $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ a $g(n) \in \mathcal{O}(h(n))$, pak $f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$.
- ▶ Jestliže $f(n) \in \Omega(g(n))$ a $g(n) \in \Omega(h(n))$, pak $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- ▶ Jestliže $f(n) \in \Theta(g(n))$ a $g(n) \in \Theta(h(n))$, pak $f(n) \in \Theta(h(n))$.

Reflexivita.

Pro všechny nezáporné funkce $f(n)$ platí: $f(n) \in \mathcal{O}(f(n))$,
 $f(n) \in \Omega(f(n))$ a $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Asymptotický růst funkcí

Tvrzení. $f(n) \in \Theta(g(n))$ právě tehdy, když $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Příklad.

- ▶ Pro každé $a > 1$ a $b > 1$ platí

$$\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n)).$$

- ▶ Platí

$$\lg n! \in \Theta(n \lg n).$$

Asymptotický růst funkcí

Gauss věta.

Pro každé $n \geq 1$

$$n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Asymptotický růst funkcí

Věta.

Máme dānu nezápornou funkci $f(n)$, která je neklesající. Jestliže platí $f(\frac{n}{2}) \in \Theta(f(n))$, pak

$$\sum_{i=1}^n f(i) \in \Theta(n f(n)).$$

Fakt. Matematickou indukci se dá dokázat, že existuje $c > 0$ takové, že

$$\sum_{i=1}^n 2^i \leq c 2^n.$$

Asymptotický růst funkcí

Jiná možnost odhadu funkcí

Je-li $f(n)$ kladná rostoucí funkce, pak

$$\int_0^n f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n f(i) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx.$$

Je-li $f(n)$ kladná klesající funkce, pak

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n f(i) \leq \int_0^n f(x) dx.$$

Asymptotický růst funkcí

Tvrzení:

Máme dány nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$, $g(n) \in \Omega(1)$, a kladnou konstantu K , takové, že $f(n) \in \Theta(g(n))$. Pak

$$f(n) + K \in \Theta(g(n)).$$

Důsledek:

Máme dány nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$, $g(n) \in \Omega(1)$, takové, že $f(n) \in \Theta(g(n))$, pak

$$\sum_{i=1}^n f(i) \in \Theta\left(\sum_{i=1}^n g(i)\right).$$