Příklad 1. Jsou dány tři nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$. Dokažte nebo vyvraťte:

Jestliže platí $f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$ a $g(n) \in \Omega(h(n))$, pak

$$f(n) + g(n) \in \Theta(h(n)).$$

Příklad 2. Jsou dány tři nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$. Dokažte nebo vyvraťte:

Jestliže platí $f(n) \in o(h(n))$ a $g(n) \in \Omega(h(n))$, pak

$$f(n) + g(n) \in o(h(n)).$$

Příklad 3. Jsou dány tři nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$, kde $f(n)$ je neklesající. Dokažte nebo vyvraťte:

Jestliže platí $g(n) \in \mathcal{O}(h(n))$, pak

$$f(n) \cdot g(n) \in \mathcal{O}(f(n) \cdot h(n)).$$

Příklad 4. Pro každou z následujících funkcí najděte nejjednodušší funkci stejného asymptotického růstu. Zdůvodněte.

1. $f(n) = 100n^2 + n \cdot (\lg n)^4$.
2. $f(n) = 4^{\lg n} + 2^n$.

Příklad 5. Odhadněte asymptotický růst funkcí; tj. najděte co nejjednodušší funkci $f(n)$ takovou že daná suma patří do $\Theta(f(n))$:

1. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$.
2. $\sum_{i=1}^{n} (\lg i)^2$.

Příklad 6. Je dána funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem. Vyřešte její asymptotické chování. Řešení zdůvodněte.

1. $T(n) = 2\,T(\frac{n}{3}) + n$, $T(1) = 1$.
2. $T(n) = 4\,T(\frac{n}{3}) + n^{\frac{1}{2}} \lg n$, $T(1) = 1$.

Výsledky

1. Příklad 1. Tvrzení neplatí.
2. Příklad 2. Tvrzení neplatí.
3. Příklad 3. Tvrzení platí.
4. Příklad 4. 1. $f(n) \in \Theta(n^2)$. 2. $f(n) \in \Theta(2^n)$.
5. Příklad 5. 1. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \in \Theta(1)$. 2. $\sum_{i=1}^{n} (\lg n)^2 \in \Theta(n \lg^2 n)$.
6. Příklad 6. 1. $T(n) \in \Theta(n)$. 2. $T(n) \in \Theta(n^{\log_3 4})$.