3 Asympt. chování funkcí, řešení rekurentních vztahů

3.1 Řešení příkladů z domácí přípravy.

1. Dokažte nebo vyvraťte: Jestliže pro funkce $f(n)$ a $g(n)$ platí $f(n) \in \Theta(h(n))$ a $g(n) \in \omega(h(n))$, pak

$$f(n) + g(n) \in \Theta(g(n)).$$

   Výsledek Tvrzení platí.

2. Odhadněte asymptotický růst funkcí:

   (a) $\sum_{i=0}^{n} (4i^3 + i^2 + 26)$.

   (b) $\sum_{i=1}^{n} (5^i + i^{100})$.

   Výsledek (a) $\sum_{i=0}^{n} (4i^3 + i^2 + 26) \in \Theta(n^4)$. (b) $\sum_{i=1}^{n} (5^i + i^{100}) \in \Theta(5^n)$.

3. Je dána funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem. Vyřešte její asymptotické chování. Řešení zdůvodněte.

   (a) $T(n) = 2\,T(\frac{n}{3}) + 1$, $T(1) = 1$.

   (b) $T(n) = 4\,T(\frac{n}{3}) + n^{\frac{3}{2}} \log_2 n$, $T(1) = 1$.

   Výsledek (a) $T(n) \in \Theta(n^{\log_3 2})$. (b) $T(n) \in \Theta(n^{\frac{3}{2}} \log_2 n)$.

3.2 Je dána funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem. Vyřešte její asymptotické chování. Řešení zdůvodněte.

1. $T(n) = T(n-1) + n^c$, $T(1) = 1$,
   a kde $c \geq 1$ je konstanta z $\mathbb{R}^+$.
2. $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$, $T(1) = 1$. (Použijte substituci $T(2^m) = S(m)$.)
3. $T(n) = T(n-1) + 2$, $T(1) = 1$.

Výsledek 1. $T(n) \in \Theta(n^{c+1})$. 2. $T(n) \in \Theta(\log_2 \log_2 n)$.
3. $T(n) \in \Theta(n)$.

3.3 Jde-li, vyřešte s použitím Master Theoremu následující vztahy. Nejde-li, zdůvodněte proč. Master theorem zformulujte.

1. $T(n) = 5\ T(\frac{n}{4}) + n$
2. $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$

Výsledek 1. $T(n) \in \Theta(n^{\log_4 5}$. 2. Master Theorem nelze použít, protože funkce $n \log n$ není ve třídě $\Omega(n^{1+\epsilon}$ pro žádné $\epsilon > 0$. Lze ale použít tvrzení za Master Theorem a dostaneme $T(n) \in \Theta(n \log_2^2 n)$.

3.4 Spočítejte amortizovanou složitost funkce $pridej(x)$, která do pole přidá prvek x. Funkce se realizuje takto: Začínáme z jednoprvkového pole, v okamžiku, kdy už je pole zaplněné, pole zdvojnásobíme, původní pole do něj překopírujeme a pak teprve přidáme x.

Výsledek Amortizovaná složitost je $\Theta(1)$.