2 Asympt. chování funkcí, řešení rekurentních vztahů

2.1 Řešení příkladů z domácí přípravy.

1. Z definice ukažte, že platí: Pro $f(n) = 2\cdot 5^n + 1000n^4$ máme $f(n) \in \Theta(5^n)$.
2. Jsou dány tři nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$. Dokažte:

   Jestliže $f(n)$ je $\mathcal{O}(g(n))$ a $g(n)$ je $\mathcal{O}(h(n))$, tak $f(n)$ je $\mathcal{O}(h(n))$.
3. Dokažte následující tvrzení: *Jsou dány nezáporné funkce $f_1(n)$, $f_2(n)$ a $h(n)$ takové, že*

   $$f_1(n) \in \Theta(h(n)),\ f_2(n) \in \Theta(h(n)\ \log_2 n),$$

   pak $(f_1 + f_2)(n) \in \Theta(h(n)\ \log_2 n)$.

Výsledek 1. Platí. 2. Platí. 3. Platí.

2.2 Odhadněte asymptotický růst funkcí:

1. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,1}}$.
2. $\sum_{i=1}^{n} (8\frac{i}{2^i})$.
3. $\sum_{i=1}^{n} (i^4\ \log_2^3 i + i^3\ \log_2^9 i)$.

Výsledek 1. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{1,1}} \in \Theta(1)$, 2. $\sum_{i=1}^{n} (8\frac{i}{2^i}) \in \Theta(1)$,
3. $\sum_{i=1}^{n} (i^4\ \log_2^3 i + i^3\ \log_2^9 i) \in \Theta(n^5 \log_2^3 n)$.

2.3 Dokažte nebo vyvraťte: Jestliže pro funkci $f(n)$ platí $f(n) \geq n$ a $k \geq 2$, pak

$$f(n) \cdot k^{f(n)} \in 2^{\mathcal{O}(f(n))}.$$

Třída $2^{\mathcal{O}(f(n))}$ se skládá ze všech funkcí $g(n)$, pro které existuje $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $g(n) \leq 2^{c\,f(n)}$. (Mohli jsme to také formulovat takto: $g(n) = 2^{h(n)}$, kde $h(n) \in \mathcal{O}(f(n))$.)

Výsledek Tvrzení platí.

2.4 Strassenův algoritmus na rychlé násobení. Máme vynásobit dvě čtvercové matice řádu 2^k. Matice rozdělíme na čtyři matice řádu 2^{k-1} a násobíme podle vztahů

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 + S_2 - S_4 + S_6 & S_4 + S_5 \\ S_6 + S_7 & S_2 - S_3 + S_5 - S_7 \end{pmatrix} \quad (1)$$

kde

$$\begin{array}{lclllcl} S_1 & = & (B-D)\cdot(G+H) & S_5 & = & A\cdot(F-H) \\ S_2 & = & (A+D)\cdot(E+H) & S_6 & = & D\cdot(G-E) \\ S_3 & = & (A-C)\cdot(E+F) & S_7 & = & (C+D)\cdot E \\ S_4 & = & (A+B)\cdot H & & & \end{array} \qquad (2)$$

Spočítejte časovou složitost Strassenova algoritmu.

Výsledek $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 7}$.

2.5 Je dána funkce $T(n)$ je dána na přirozených číslech rekurentním vztahem. Vyřešte její asymptotické chování. Řešení zdůvodněte.

1. $T(n) = 4\,T(\frac{n}{2}) + n\log_2 n$, $T(1) = 1$.
2. $T(n) = 9\,T(\frac{n}{3}) + n^2$, $T(1) = 1$.
3. $T(n) = 30\,T(\frac{n}{25}) + n^{\frac{3}{2}}\log_2 n$, $T(1) = 1$.

Výsledek 1. $T(n) \in \Theta(n^2)$. 2. $T(n) \in \Theta(n^2\ \log_2 n)$. 3. $T(n) \in \Theta(n^{\frac{3}{2}}\log_2 n)$.