1 Asymptotické chování funkcí

1.1 Rozhodněte, zda platí

- 2^{n+1} je $\Theta(2^n)$,
- $2^{\frac{n}{2}}$ je $\Theta(2^n)$.

Výsledek První tvrzení platí, druhé neplatí.

1.2 Jsou dány funkce

$$5^n,\ n!,\ n^{\frac{1}{\ln n}},\ e^n,\ \ln(n!),\ \ln\ \ln n,\ n\log_2 n,\ \ln(n^{\ln n}),\ \sqrt{n},\ \frac{1}{n}.$$

Uspořádejte tyto funkce do posloupnosti $f_1, f_2, \ldots$, tak, aby $f_i \in \mathcal{O}(f_{i+1})$, kde $i = 1, 2, \ldots$ Uveďte všechny dvojice funkcí f, g takové, že $f \in \Theta(g)$.

Výsledek $f_1(n) = \frac{1}{n}, f_2(n) = n^{\frac{1}{\ln n}} = e, f_3(n) = \ln(\ln n), f_4(n) = \ln(n^{\ln n}) = (\ln n)^2, f_5(n) = \sqrt{n}, f_{6-7}(n) = \ln(n!), f_{6-7}(n) = n\log_2 n, f_8(n) = e^n, f_9(n) = 5^n, f_{10}(n) = n!$.

1.3 Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Jestliže pro dvě nezáporné funkce platí $f(n)$ je $\mathcal{O}(g(n))$, pak $2^{f(n)}$ je $\mathcal{O}(2^{g(n)})$.

(b) Pro každou nezápornou funkci $f(n)$ platí $f(n) \in \mathcal{O}(f(n)^2)$.

Výsledek Neplatí ani jedno.

1.4 Je dána funkce $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Najděte co nejjednodušší funkci $g(n)$, pro kterou platí $f(n) \in \Theta(g(n))$.

Výsledek $f(n) \in \Theta(\ln n)$.

1.5 Jsou dány funkce $f(n) = n^{\ln n}$ a $g(n) = (\log_2 n)^n$. Rozhodněte, zda platí $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ nebo ani jedno.

Výsledek $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ a $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$

1.6 Nalezněte horní odhad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}.$$

Hint: Pro horní odhad sumy použijte vhodnou geometrickou řadu.

Výsledek $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} \leq \frac{3}{4}$

1.7 Dokažte následující tvrzení: *Jsou dány nezáporné funkce $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$ takové, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ pro něž*

$$g(n) \leq f(n) \leq h(n),$$

pro všechna $n \geq n_0$. Pak jestliže $g(n) \in \Omega(k(n))$ a $h(n) \in \mathcal{O}(k(n))$, pak $f(n) \in \Theta(k(n))$.