

## **STRUKTURY**

- A. Nakreslete binomiální haldu H1 se 7 navzájem různými celočíselnými klíči z rozmezí 10, 11, ..., 19.
- B. Nakreslete binomiální haldu H2 s 6 navzájem různými celočíselnými klíči z rozmezí 40, 41, ..., 49.
- C. Nakreslete binomiální haldu H3, která vznikne aplikací operace Merge na haldy H1 a H2.
- D. Vysvětlete, zda je možné v binomiální haldě s  $n$  klíči najít druhý nejmenší prvek v čase  $O(\log(n))$ .
- 

V této úloze uvažujeme B+ strom, jehož každý uzel kromě kořene obsahuje alespoň 2 klíče a nejvýše 4 klíče a každý vnitřní uzel kromě kořene má alespoň 3 potomky a nejvýše 5 potomků.

- A. B+ strom má hloubku 4. Jaký je minimální možný počet klíčů v tomto B+ stromu?
- B. Nakreslete příklad B+ stromu, který obsahuje 15 klíčů s hodnotami 1, 2, 3, ..., 15.
- 

- A. Zdůvodněte, jaký je maximální možný počet červených uzlů v R-B stromu, jehož černá výška je 3 a který obsahuje maximální možný počet klíčů.
- B. Splay tree  $S$  obsahuje 7 klíčů, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 a je perfektně vyvážený. Do  $S$  postupně vložte klíče 45 a 30 a nakreslete strom po každém vložení.
- C. Vysvětlete, zda je nebo není možné, aby v B+ stromu byl uložen jednak určitý klíč  $k$  a kromě toho také jeho dva další duplikáty v jiných uzlech (tedy celkem tři výskyty hodnoty klíče  $k$  ve stromu).
- 

- A. Do binární haldy s  $n^2$  prvky vložte dalších  $n$  prvků pomocí operace Insert. Jaká bude asymptotická složitost tohoto procesu? Vysvětlete.
- B. Do binomiální haldy s  $n$  prvky vložte dalších  $\log(n^2)$  prvků pomocí operace Insert. Jaká bude asymptotická složitost tohoto procesu? Vysvětlete.
- C. Vysvětlete, proč je v binomiální haldě amortizovaná složitost operace Insert v binomiální haldě menší než asymptotická složitost téže operace.
- 

Sestavte skip list  $L$ , který obsahuje uvedené klíče. Číslo za klíčem v závorce uvádí úroveň (level) klíče, tj. kolikrát byla hozena mince, než padl rub (včetně rubu).

A(1), C(2), H(3), N(1), Q(2), R(4), W(1), Z(2).

- A. Nakreslete skip list  $L$ .
- B. Do skip listu  $L$  vložte pomocí operace Insert klíč S(1). Určete, kolik vzájemných porovnání dvou klíčů bude provedeno při této akci. Počet porovnání zdůvodněte.
- C. Ze skip listu  $L$  odstraňte pomocí operace Delete klíč Q. Určete, kolik vzájemných porovnání dvou klíčů bude provedeno při této akci. Počet porovnání zdůvodněte.

D. Předpokládejte, že skip list  $K$  obsahuje  $n^2$  klíčů. Do  $K$  bude dále vloženo  $n$  dalších klíčů. Jaká je očekávaná asymptotická složitost celé této operace? Zdůvodněte.

---

Haldy. Předpokládáme, že minimální prvek je vždy na vrcholu haldy.

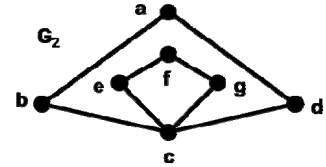
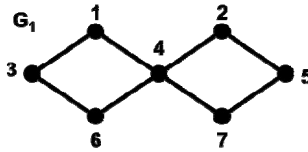
A. Nakreslete binomiální haldu  $H_1$  se 7 navzájem různými celočíselnými klíči z rozmezí 20, 21, ..., 29. Dále nakreslete binomiální haldu  $H_2$  s 6 navzájem různými celočíselnými klíči z rozmezí 30, 31, ..., 39.

B. Nakreslete binomiální haldu  $H_3$ , která vznikne aplikací operace Merge na haldy  $H_1$  a  $H_2$ .

C. Vysvětlete, zda je vždy možné v binomiální haldě s  $n$  klíči najít druhý nejmenší prvek v čase  $O(\log(n))$ , bez toho, že bychom z haldy klíče odebírali nebo do ní přidávali.

## GRAFY

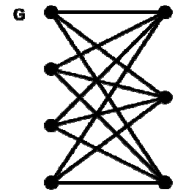
Jsou dány grafy  $G_1 = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{6, 3\}, \{6, 4\}, \{7, 4\}, \{7, 5\}\}\}$  a  $G_2 = \{\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, c\}\}\}$  na obrázku.



- Napište stručné zdůvodnění, proč jsou navzájem izomorfní.
- Určete počet izomorfizmů mezi  $G_1$  a  $G_2$ .
- Kompletně specifikujte dva různé izomorfizmy mezi  $G_1$  a  $G_2$ , využijte přitom označení jednotlivých vrcholů v  $G_1$  a  $G_2$ .
- Uveďte příklad jedné hrany v  $G_1$  a jedné hrany v  $G_2$ , po jejichž odstranění oba grafy přestanou být izomorfní.

Na obrázku je dán úplný bipartitní graf  $G$  se 7 vrcholy.

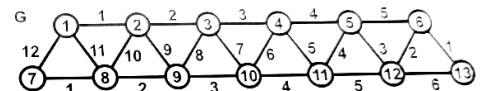
Úplný bipartitní graf je prostý graf (bez paralelních hran), který se skládá ze dvou disjunktních množin vrcholů  $V_1$  a  $V_2$  a hran mezi nimi, přičemž každá hrana má jeden koncový vrchol ve  $V_1$  a druhý ve  $V_2$  a hran je maximální možný počet.



Pro  $G$  platí  $|V_1| = 4$ ,  $|V_2| = 3$ .

- Orientujte všechny hrany  $G$  tak, aby vznikl (orientovaný) graf  $G_2$  s právě čtyřmi silně souvislými komponentami.
- Nakreslete kondenzaci grafu  $G_2$ .
- Předpokládejte, že hrany  $G$  jsou náhodně orientovány (každá hrana může být orientována jen jedním směrem). Jaký je možný počet vrcholů v jedné silně souvislé komponentě výsledného grafu? Uveďte všechny možnosti.
- Předpokládejte, že je dán úplný bipartitní graf  $H$  s  $M + N$  vrcholy ( $M, N \geq 2$ ), kde  $M$  a  $N$  jsou počty vrcholů v množinách vrcholů  $V_1$  a  $V_2$ . V grafu  $H$  je náhodně orientována každá hrana. Počet silně souvislých komponent je zjišťován pomocí Tarjanova algoritmu. Určete asymptotickou složitost tohoto procesu v závislosti na hodnotách  $M$  a  $N$ . Napište krátké zdůvodnění, nepopisujte, pokud možno, samotný Tarjanův algoritmus.

Na obrázku je dán vážený graf  $G$  s vrcholy očíslovanými 1 – 13.



- Určete váhu minimální kostry  $G$  a nakreslete tuto kostru.
- Předpokládejte že hledání minimální kostry daného grafu  $G$  proběhne pomocí Primova algoritmu a že začne ve vrcholu 13. Napište jednu z možných posloupností hran  $G$ , které bude Primův algoritmus postupně přidávat do minimální kostry.

C. Předpokládejte že hledání minimální kostry daného grafu  $G$  proběhne pomocí Kruskalova algoritmu. Napište jednu z možných posloupností hran  $G$ , které bude Kruskalův algoritmus postupně přidávat do minimální kostry.

D. Předpokládejte, že graf  $H$  má  $n$  vrcholů a  $\lfloor n^{1.5} \rfloor$  hran (závorky  $\lfloor \cdot \rfloor$  představují dolní celou část reálného čísla). Předpokládejte dále, že asymptotická složitost každé z operací Union a Find v Kruskalově algoritmu je úměrná hodnotě  $n^{0.5}$ . Uveďte a zdůvodněte asymptotickou složitost Kruskalova algoritmu za uvedených podmínek.

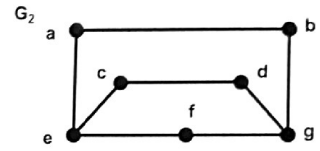
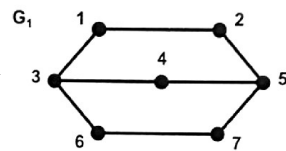
V této úloze pracujeme s neorientovanými prostými grafy, bez smyček a paralelních hran.

A. Nakreslete dva úplné grafy  $G_1$  a  $M_1$ , každý s pěti vrcholy a deseti hranami. Z grafu  $G_1$  odstraňte tři hrany a výsledný graf označte  $G_2$ . Z grafu  $M_1$  odstraňte tři hrany a výsledný graf označte  $M_2$ . Dodržte přitom podmínku, že grafy  $G_2$  a  $M_2$  nebudou izomorfní. Vysvětlete, proč  $G_2$  a  $M_2$  nejsou izomorfní.

B. Nakreslete dva úplné grafy  $P_1$  a  $Q_1$ , každý s pěti vrcholy a deseti hranami. Z grafu  $P_1$  odstraňte tři hrany a výsledný graf označte  $P_2$ . Z grafu  $Q_1$  odstraňte tři hrany a výsledný graf označte  $Q_2$ . Dodržte přitom podmínku, že grafy  $P_2$  a  $Q_2$  budou izomorfní. Určete a zdůvodněte počet různých izomorfizmů mezi  $P_2$  a  $Q_2$ .

C. Graf  $U_1$  má  $2n$  vrcholů a  $n$  hran ( $n \geq 3$ ), přičemž stupeň každého vrcholu je 1. Graf  $U_2$  vznikl tak, že do  $U_1$  byly přidány dvě nové hrany. Graf  $U_3$  vznikl analogicky, do  $U_1$  byly přidány dvě nové hrany. Oba grafy  $U_2$  a  $U_3$  tedy mají  $2n$  vrcholů a  $n+2$  hrany. Navrhněte a popište postup (nepište kód ani pseudokód), pomocí něž se určí, zda  $U_2$  a  $U_3$  jsou či nejsou navzájem izomorfní. Určete a zdůvodněte asymptotickou složitost tohoto postupu.

Jsou dány grafy  $G_1 = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{5, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 1\}, \{5, 7\}, \{7, 6\}, \{6, 3\}\}\}$  a  $G_2 = \{\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{\{a, b\}, \{b, g\}, \{g, d\}, \{d, c\}, \{c, e\}, \{e, a\}, \{g, f\}, \{f, e\}\}\}$  na obrázku.



A. Napište stručné zdůvodnění, proč jsou navzájem izomorfní.

B. Uveďte pro graf  $G_1$  dva různé invarianty založené na stupních vrcholů.

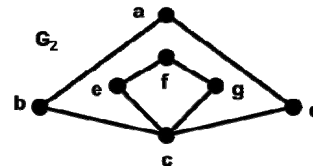
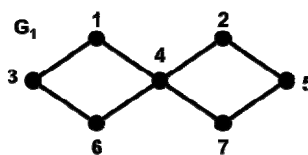
C. Určete počet bijekcí mezi  $G_1$  a  $G_2$ , které nejsou izomorfismy.

D. Graf  $C_1$  s  $n$  vrcholy a  $n+2$  hranami vznikl tak, že do kružnice s  $n$  vrcholy ( $n \geq 5$ ) byly přidány dvě další hrany. Graf  $C_2$  s  $n$  vrcholy a  $n+2$  hranami vznikl analogicky, to jest, do jiné kružnice s  $n$  vrcholy byly přidány dvě další hrany. Navrhněte a popište co nejefektivnější postup (nepište kód ani pseudokód), pomocí něž se určí, zda  $C_1$  a  $C_2$  jsou či nejsou navzájem izomorfní. Určete a zdůvodněte asymptotickou složitost tohoto postupu.

Jsou dány grafy  $G_1 = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{6, 3\}, \{6, 4\}, \{7, 4\}, \{7, 5\}\}\}$  a  $G_2 = \{\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{c, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, c\}\}\}$  na obrázku.

A. Napište zdůvodnění, proč jsou  $G_1$  a  $G_2$  navzájem izomorfní.

B. Určete počet izomorfizmů mezi  $G_1$  a  $G_2$ . Zdůvodněte svůj výsledek.



C. Uveďte příklad jedné hrany v  $G_1$  a jedné hrany v  $G_2$ , po jejichž odstranění oba grafy přestanou být izomorfní. Zdůvodněte svůj výsledek.

D. Graf  $C_1$  s  $n$  vrcholy a  $n+2$  hranami vznikl tak, že do kružnice s  $n$  vrcholy ( $n \geq 5$ ) byly přidány dvě další hrany. Graf  $C_2$  s  $n$  vrcholy a  $n+2$  hranami vznikl analogicky, to jest, do jiné kružnice s  $n$  vrcholy byly přidány dvě další hrany. Navrhněte a popište co nejefektivnější postup (nepište kód ani pseudokód), pomocí něž se určí, zda  $C_1$  a  $C_2$  jsou či nejsou navzájem izomorfní. Určete a zdůvodněte asymptotickou složitost tohoto postupu.

A. Je dán orientovaný graf  $G = (V, E)$  s alespoň jedním uzlem, definujte silně souvislou komponentu.

B. rozhodněte, zda platí následující tvrzení: V každém orientovaném grafu jsou 2 různé silně souvislé komponenty disjunktní, t.j. nesdílí žádný uzel ani hranu.

C.  $A, B$  jsou silně souvislé komponenty, dvojice  $A$  a  $B$  jsou izolované, nejsou-li spojeny hranou, která má jeden vrchol v  $A$  a druhý v  $B$ . Jaká je asymptotická složitost určení počtu izolovaných dvojic silně souvislých komponent v  $G$ , nepište ano kód ani pseudokód.

D. Je dán orientovaný graf  $H$ , jenž má  $n$  vrcholů a  $m$  hran, popište, co nejefektivněji algoritmus, který nejprve rozhodne, zda  $H$  obsahuje alespoň  $\lfloor n^{0.5} \rfloor$  silně souvislých komponent, pokud ano, pak komponentu s minimálním počtem vrcholů rozšíří na úplný orientovaný graf, pokud je takových komponent více, nic neudělá, odvoďte časovou složitost.

A. Určete počet isomorfizmů mezi grafy  $F_1 = \{\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$  a  $F_2 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}\}$ .

B. Nakreslete 2 kružnice  $K_1$  a  $H_1$  o 10 vrcholech, v  $K_1$  označte vrcholy  $\{a, b, c, d\}$  a přidejte hrany  $\{a, b\}$  a  $\{c, d\}$ , výsledný graf označte  $K_2$ , v  $H_1$  označte vrcholy  $\{s, t, u, v\}$  a přidejte hrany  $\{s, t\}$  a  $\{u, v\}$ , výsledný graf označte  $H_2$ , tak, aby grafy nebyly isomorfní, vysvětlete, proč isomorfní nejsou.

C. Nakreslete 2 kružnice  $L_1$  a  $J_1$  o 10 vrcholech, v  $L_1$  označte vrcholy  $\{k, l, m, n\}$  a přidejte hrany  $\{k, l\}$  a  $\{m, n\}$ , výsledný graf označte  $L_2$ , v  $J_1$  označte vrcholy  $\{w, x, y, z\}$  a přidejte hrany  $\{w, x\}$  a  $\{y, z\}$ , výsledný graf označte  $J_2$ , tak, aby grafy byly isomorfní, určete počet isomorfizmů.

D. Je dán graf  $C_1$  a  $C_2$  s  $n$  vrcholy a  $n+2$  hranami vzniklé přidáním 2 hran do kružnice, napište postup a určete asymptotickou složitost určení, jestli jsou  $C_1$  a  $C_2$  isomorfní.

## JAZYKY

Je dán jazyk  $L$  nad abecedou  $\{b, c, d\}$ , v němž každé slovo má délku alespoň 2 a navíc začíná a končí stejným znakem.

- A. Napište dvě slova jazyka  $L$ , která mají Hammingovu vzdálenost rovnou 4.
  - B. Napište dvě nestejně dlouhá slova jazyka  $L$ , která mají Levenshteinovu vzdálenost rovnou 2. Zdůvodněte, proč je jejich vzdálenost právě taková.
  - C. Sestavte konečný automat  $A$  nad abecedou  $\{b, c, d\}$ , který přijímá jazyk  $L$ . Nakreslete přechodový diagram automatu  $A$ .
  - D. Modifikujte automat  $A$  tak, aby vznikl automat  $B$ , který bude detekovat v textu nad abecedou  $\{a, b, c, d\}$  všechna slova jazyka  $L$ . Nakreslete přechodový diagram automatu  $B$ .
- 

Jsou dány jazyky  $L_1, L_2, L_3$  nad abecedou  $\{a, b, c\}$ .  $L_1$  je reprezentován regulárním výrazem  $(aa+bbb)^*c$ ,  $L_2$  je reprezentován regulárním výrazem  $c(aa+bb)^*$ . Jazyk  $L_3 = L_1.L_2$  je zřetěžením jazyků  $L_1$  a  $L_2$ .

- A. Rozhodněte a zdůvodněte, zda průnik jazyka  $L_1 \cup L_2$  s jazykem  $L_3$  je prázdný nebo neprázdný.
  - B. Nakreslete přechodový diagram nedeterministického konečného automatu  $A$ , který přijímá jazyk  $(L_1 \cup L_2)^*$ .
  - C. Modifikujte automat  $A$  tak, aby vznikl automat  $B$ , který detekuje v textu nad abecedou  $\{a, b\}$  všechna slova jazyka  $(L_1 \cup L_2)^*$ . Automat  $B$  předložte ve formě tabulky, kde řádky odpovídají stavům automatu  $B$  a sloupce odpovídají znakům abecedy automatu  $B$ . V tabulce vyznačte startovní stav a koncové stavy.
- 

Je dán jazyk  $L$  nad abecedou  $\{a, b, c\}$ , který je popsán regulárním výrazem  $(ac + bc)(aa + bb)^*$ .

- A. Pro dané sudé celé číslo  $n$  určete počet slov  $L$ , která mají délku  $n$ . Napište celý výpočet.
  - B. Napište dvě nestejně dlouhá slova jazyka  $L$ , jejichž vzájemná Levenshteinova vzdálenost je rovna 3. Zdůvodněte, proč je jejich vzdálenost právě taková.
  - C. Nakreslete přechodový diagram automatu  $A$  nad abecedou  $\{a, b, c\}$ , který přijímá jazyk  $L$ .
  - D. Modifikujte automat  $A$  tak, aby vznikl automat  $B$ , který bude detekovat v textu nad abecedou  $\{a, b, c\}$  všechna slova jazyka  $L$ . Vyjmenujte všechny prvky množiny vzorů a všechny prvky množiny obrazů přechodové funkce  $\delta$  automatu  $B$ . Ke každému prvku množiny vzorů určete jeho obraz v přechodové funkci  $\delta$ .
- 

Je dán jazyk  $L$  nad abecedou  $\{a, b, c\}$ , v němž každé slovo obsahuje právě jeden znak  $b$  a právě dva znaky  $c$ .

- A. Pro dané kladné celé číslo  $n$  určete počet slov  $L$ , která mají délku  $n$ .

B. Napište dvě nestejně dlouhá slova jazyka  $L$ , jejichž vzájemná Levenshteinova vzdálenost je rovna 2. Zdůvodněte, proč je jejich vzdálenost právě taková.

C. Nakreslete přechodový diagram automatu  $A$  nad abecedou  $\{a, b, c\}$ , který přijímá všechna slova jazyka  $K = L.L$ , tj. zřetězení jazyka  $L$  se samým sebou.

D. Modifikujte automat  $A$  tak, aby vznikl automat  $B$ , který detekuje v textu nad abecedou  $\{a, b, c\}$  všechna slova jazyka  $K = L.L$ . Automat  $B$  předložte ve formě tabulky, kde řádky odpovídají stavům automatu  $B$  a sloupce odpovídají znakům abecedy automatu  $B$ . V tabulce vyznačte startovní stav a koncové stavy.

---

Je dán jazyk  $L$  nad abecedou  $\{a, b, c\}$ , který je popsán regulárním výrazem  $aa^*bb^*cc$ .

A. Pro dané kladné celé číslo  $n \geq 3$  určete počet slov  $L$ , která mají délku  $n$ . Napište celý výpočet.

B. Napište dvě slova jazyka  $L$ , jejichž délka je 10 a jejichž vzájemná Levenshteinova vzdálenost je rovna maximální možná. Zdůvodněte, proč je jejich vzdálenost právě taková.

C. Jazyk  $K$  obsahuje právě každé slovo nad abecedou  $\{a, b, c\}$ , jehož Levenshteinova vzdálenost od některého slova  $L$  je  $\leq 1$ , nakreslete přechodový diagram bez  $\epsilon$  přechodů automatu  $A$  nad abecedou  $\{a, b, c\}$ , který přijímá  $K$ .

D. Modifikujte automat  $A$  tak, aby vznikl automat  $B$ , který bude detekovat v textu nad abecedou  $\{a, b, c\}$  všechna slova jazyka  $K$ . Automat  $B$  přeložte ve formě tabulky, kde řádky odpovídají znakům abecedy automatu  $B$ , v tabulce vyznačte startovní stav a koncové stavy, zdůvodněte, zda  $B$  je nebo není deterministický.

## GENERÁTORY

Generátory pseudonáhodných čísel. Popište metody řešení, které nevyžadují generování všech kombinací parametrů a jim odpovídajících posloupností.

A. Lineární kongruenční generátor generuje posloupnost (6, 5, 2, 3, 6, 5, 2, ...), víme, že modulus je 10, určete zbylé parametry.

B. Generátor  $x_{n+1} = (Ax_n + C) \bmod 36$ , kde  $0 \leq x_0 < 36$  a  $1 \leq A, C < 36$ , určete všechny různé dvojice A a C, že perioda posloupnosti je 36.

C. uveďte příklad dle B. s periodou 1, kde  $A, C > 4$ .

D. Lehmerův generátor generuje posloupnost (5, 7, 8, 4, 2, 1, 5, 7, ...), víme, že modulus  $M = 9$ , určete zbývající parametry.