Teorie algoritmů — 13. týden

Marie Demlová
http://math.fel.cvut.cz/en/people/demlova

12. 5. 2026

Nerozhodnutelnost

Kód Turingova stroje.

Máme Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, kde

- $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$,
- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- $\Gamma = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, zde $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ a $X_3 = B$,
- $q_0 = q_1$,
- $F = \{q_2\}$.
- Označme $D_1 := R$ a $D_2 := L$.

Nerozhodnutelnost

Jedné hodnotě přechodové funkce δ

$$\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_r)$$

přiřadíme následující slovo

$$t = 0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^r.$$

Kód M, značíme ho $\langle M \rangle$, je

$$\langle M \rangle = 111\, t_1\, 11\, t_2\, 11 \ldots 11\, t_p\, 111,$$

kde $t_1, \ldots, t_p$ jsou slova odpovídající všem hodnotám přechodové funkce M.

Univerzální problém

Univerzální problém.

Instance: Je dán Turingův stroj M a slovo w.
Otázka: Platí, že $w \in L(M)$?

Univerzální jazyk.

Univerzální jazyk L_{UN} je definován

$$L_{UN} = \{\langle M \rangle w \mid \; w \in L(M)\}.$$

Univerzální problém

Univerzální Turingův stroj.

Zhruba řečeno, univerzální Turingův stroj M_{UN} je Turingův stroj, který přijímá univerzální jazyk L_{UN}.

Univerzální Turingův stroj M_{UN} má 4 pásky.

- První páska obsahuje vstup $\langle M \rangle\, w$,
- druhá páska simuluje pásku TM M,
- třetí páska obsahuje kód stavu, ve kterém se TM M nachází,
- čtvrtá páska je pomocná.

Univerzální problém

Věta.

Univerzální Turingův stroj M_{UN} přijímá univerzální jazyk L_{UN}.

Důsledek.

Univerzální jazyk L_{UN} je rekurzivně spočetný.

Tvrzení.

Univerzální jazyk L_{UN} není rekurzivní.

Další nerozhodnutelné problémy

Tvrzení.

Jsou dány dva jazyky

$$L_e = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \emptyset\}, \quad L_{ne} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \neq \emptyset\},$$

L_{ne} je rekurzivně spočetný, ale není rekurzivní. L_e není rekurzivně spočetný.

Věta (Rice).

Každá netriviální vlastnost rekurzivně spočetných jazyků je nerozhodnutelná.

Další nerozhodnutelné problémy

Redukce.

Jsou dány dvě rozhodovací úlohy $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$. Píšeme $\mathcal{U} \lhd \mathcal{V}$, jestliže existuje algoritmus (Turingův stroj, program pro RAM) $\mathcal{A}$, který pro každou instanci I úlohy $\mathcal{U}$ zkonstruuje instanci J úlohy $\mathcal{V}$ s vlastností

$$I \text{ je ANO instance iff } J \text{ je ANO instance.}$$

Jsou dány dva jazyky $L_1 \subseteq \Sigma^\star$, $L_2 \subseteq \Gamma^\star$. Píšeme $L_1 \lhd L_2$, jestliže existuje algoritmus (Turingův stroj, program pro RAM) $\mathcal{A}$, který pro každé slov $w \in \Sigma^\star$ zkonstruuje slovo $u \in \Gamma^\star$ s vlastností

$$w \in L_1 \text{ iff } u \in L_2.$$

Další nerozhodnutelné problémy

Tvrzení.

Jsou dány dvě rozhodovací úlohy $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ (dva jazyky L_1 a L_2) takové, že $\mathcal{U} \lhd \mathcal{V}$ ($L_1 \lhd L_2$), pak platí

1) Je-li $\mathcal{U}$ (L_1) nerozhodnutelný, pak $\mathcal{V}$ (L_2) je také nerozhodnutelný.
2) Jestliže $\mathcal{U}$ (L_1) není rekurzivně spočetný, pak $\mathcal{V}$ (L_2) také není rekurzivně spočetný.
3) Je-li $\mathcal{V}$ (L_2) rekurzivní, pak $\mathcal{U}$ (L_1) je také rekurzivní.

Další nerozhodnutelné problémy

Postův korespondenční problém (PCP).

Jsou dány dva seznamy neprázdných slov A, B nad abecedou Σ

$$A = (w_1, w_2, \ldots, w_k), \quad B = (x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

kde $w_i, x_i \in \Sigma^\star$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Řekneme, že A, B má řešení, jestliže existuje konečná posloupnost $i_1, i_2, \ldots, i_r$ indexů $i_j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ taková, že

$$w_{i_1}\, w_{i_2}\, \ldots\, w_{i_r} = x_{i_1}\, x_{i_2}\, \ldots\, x_{i_r}.$$

Otázka: Existuje řešení pro seznamy A, B?

Další nerozhodnutelné problémy

Příklady.

1. Jsou dány seznamy

	1	2	3	4	5
A	011	0	101	1010	010
B	1101	00	01	00	0

2. Jsou dány seznamy

	1	2	3	4	5
A	11	0	101	1010	010
B	101	00	01	00	0

Další nerozhodnutelné problémy

Modifikovaný Postův korespondenční problém (MPCP).
Jsou dány dva seznamy neprázdných slov A, B nad abecerou Σ.

$$A = (w_1, w_2, \ldots, w_k), \quad B = (x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

kde $w_i, x_i \in \Sigma^\star$, $i = 1, 2, \ldots, k$,
Řekneme, že A, B mají řešení (v MPCP), jestliže existuje posloupnost indexů $1, i_1, i_2, \ldots, i_r$, i.e. $i_j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ taková, že

$$w_1\, w_{i_1}\, w_{i_2}\, \ldots\, w_{i_r} = x_1\, x_{i_1}\, x_{i_2}\, \ldots\, x_{i_r}.$$

Otázka: Existuje řešení pro seznamy A, B?

Další nerozhodnutelné problémy

Věta 1.

Platí

$$\text{MPCP} \lhd \text{PCP}.$$

Příklad.

Jsou dány seznamy

	1	2	3
A	0	011	010
B	00	1101	0

Další nerozhodnutelné problémy

Věta.

Platí

$$\text{Univerzální problém} \lhd \text{ MPCP.}$$

Důsledek.

PCP je nerozhodnutelný problém.