

12 Randomizované třídy

12.1 Navrhňte RTM M , který se pro dané binární vstupní slovo $w = a_1a_2 \dots a_n$, $n > 0$, chová takto:

- Jestliže na druhé (náhodné) pásce je v prvním poli symbol 0, pak M zkontroluje, zda se symboly vstupního slova w na sudých místech shodují s obsahem druhého a dalšího pole náhodné pásky.

Přesněji, označme r_i obsah i -tého pole druhé (náhodné) pásky. RTM M skončí v koncovém stavu právě tehdy, když platí $a_{2k} = r_{k+1}$ pro všechna k taková, že $2k \leq n$.

- Jestliže na druhé (náhodné) pásce je v prvním poli symbol 1, pak M zkontroluje, zda se symboly vstupního slova w na lichých místech shodují s obsahem druhého a dalšího pole náhodné pásky.

Přesněji, RTM M skončí v koncovém stavu právě tehdy, když platí $a_{2k+1} = r_{k+2}$ pro všechna k taková, že $2k + 1 \leq n$.

1. Pro každé binární slovo w spočítejte pravděpodobnost, že RTM M skončí v koncovém stavu.
2. Je pravda, že M zajišťuje některému jazyku, že leží ve třídě \mathcal{RP} ? Jestliže ano, pak který jazyk; jestliže ne, uveďte proč.

12.2 Navrhňte RTM M , který se pro dané vstupní slovo $w = a_1a_2 \dots a_n$, $n > 0$, nad abecedou $\{a, b\}$ chová takto:

- Jestliže na druhé (náhodné) pásce je v prvním poli symbol 0, pak M zkontroluje, zda se jedná o slovo w , které obsahuje aspoň jedno a a aspoň jedno b .
- Jestliže na druhé (náhodné) pásce je v prvním poli symbol 1, pak M zkontroluje, zda vstupní slovo w končí stejným symbolem jako začíná.

1. Pro každé slovo w spočítejte pravděpodobnost, že RTM M skončí v koncovém stavu.
2. Je pravda, že M zajišťuje některému jazyku, že leží ve třídě \mathcal{RP} ? Jestliže ano, pak který jazyk; jestliže ne, uveďte proč.

12.3 Označme L jazyk, který se skládá z neorientovaných grafů, které obsahují trojúhelník (podgraf, který je isomorfní s úplným grafem na 3 vrcholech). Je dán následující pravděpodobnostní algoritmus.

1. Náhodně vybereme hranu $\{x, y\}$ grafu G a vrchol z , $z \neq x$, $z \neq y$.
2. Zkontrolujeme, zda v G jsou hrany $\{x, z\}$ a $\{y, z\}$. Jestliže ano, úspěšně skončíme.

Spočítejte, kolikrát máme opakovat kroky 1 a 2, abychom dostali polynomiální algoritmus typu Monte-Carlo pro jazyk L .

12.4 Náhodná permutace 1. Pro následující algoritmus rozhodněte, zda vygenerují náhodnou permutaci (tj. vygenerují každou permutaci a se stejnou pravděpodobností):

Algoritmus:

```
for  $i = 1$  to  $n$  do  $A[i] := i$ ;
for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
  swap  $A[i] \longleftrightarrow A[\text{Random}(i + 1, n)]$ ;
```

12.5 Náhodná permutace 2. Pro následující algoritmus rozhodněte, zda vygenerují náhodnou permutaci (tj. vygenerují každou permutaci a se stejnou pravděpodobností):

Algoritmus:

```
for  $i = 1$  to  $n$  do  $A[i] := i$ ;
for  $i = 1$  to  $n$  do
  swap  $A[i] \longleftrightarrow A[\text{Random}(i, n)]$ ;
```

12.6 Náhodná permutace 3. Pro následující algoritmus rozhodněte, zda vygenerují náhodnou permutaci (tj. vygenerují každou permutaci a se stejnou pravděpodobností):

Algoritmus:

```
for  $i = 1$  to  $n$  do  $A[i] := i$ ;
for  $i = 1$  to  $n$  do
  swap  $A[i] \longleftrightarrow A[\text{Random}(1, n)]$ ;
```

Samostaná práce na příští cvičení

12.7 Navrhněte RTM M , který se pro dané vstupní slovo $w = a_1a_2 \dots a_n$, $n > 0$, nad abecedou $\{0, 1\}$ chová takto:

- Jestliže na druhé (náhodné) pásce je v prvním poli symbol 0, pak M zkontroluje, zda se jedná o slovo w , které obsahuje aspoň jedno 0 a aspoň dvě 1.
- Jestliže na druhé (náhodné) pásce je v prvním poli symbol 1, pak M zkontroluje, zda se jedná o slovo w , které obsahuje aspoň dvě 0 a aspoň jednu 1.

1. Pro každé slovo w spočítejte pravděpodobnost, že RTM M skončí v koncovém stavu.
2. Je pravda, že M zajišťuje některému jazyku, že leží ve třídě \mathcal{RP} ? Jestliže ano, pak který jazyk; jestliže ne, uveďte proč.