

10 Polynomiální redukce

Vysvětlení chyb z písemného testu na Turingovy stroje.

10.1 Rozhodněte o příslušnosti následujících problémů do tříd \mathcal{P} a \mathcal{NP} (\mathcal{NPC} ověříme později):

- Je daný graf souvislý?
- Je daný graf rovinný?
- Obsahuje daný graf hamiltonovskou kružnici?
- Je dané přirozené číslo číslem složeným?
- Lze batoh o dané kapacitě zaplnit některými z daných předmětů, aby nepřekročil zadanou váhu a současně měl maximální cenu?

Výsledek. a), b) a d) leží v \mathcal{P} , c) a e) leží v \mathcal{NPC} .

10.2 Rozhodněte, zda problém splnitelnosti formulí v DNF (disjunktivním normálním tvaru) leží v \mathcal{P} nebo jen v \mathcal{NP} , a své tvrzení zdůvodněte.

Výsledek. Problém leží v \mathcal{P} .

10.3 Ukažte, že

Problém klik se polynomiálně redukuje na problém SAT.

Polynomiální redukci pečlivě popište a zdůvodněte.

Výsledek. Je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček a číslo k . Ptáme se, zda existuje v G klika o alespoň k vrcholech.

Zkonstruujeme formuli φ v CNF takto:

Logické proměnné: pro každý vrchol $v \in V$ zavedeme k logických proměnných x_v^1, \dots, x_v^k . Formulemi vyjádříme:

- Pro každé $i = 1, \dots, k$ je vybrán přesně jeden vrchol — formule α .
- Pro různé i, j , $i, j \in \{1, \dots, k\}$ jsou vybrané vrcholy různé — formule β .
- Jestliže $\{u, v\} \notin E$, pak nebyly do kliky vybrány oba vrcholy u a v — formule γ .

Add 1)

$$\alpha = \bigwedge_{i=1}^k \left[\left(\bigvee_{v \in V} x_i^v \right) \wedge \bigwedge_{u \neq v} (\neg x_i^u \vee \neg x_i^v) \right].$$

Add 2)

$$\beta = \bigwedge_{v \in V} \bigwedge_{i \neq j} (\neg x_v^i \vee \neg x_v^j).$$

Add 3)

$$\gamma = \bigwedge_{\{u,v\} \notin E} \bigwedge_{i \neq j} (\neg x_u^i \vee \neg x_v^j).$$

Nyní je hledaná formule $\varphi = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma$.

10.4 Zkonstruuje polynomiální redukci problému existence hamiltonovského cyklu na problém existence hamiltonovské orientované cesty. Fakt, že se jedná o polynomiální redukci pečlivě zdůvodněte.

Výsledek. Jedna z redukcí je tato:

Je dán prostý orientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček. Zkonstruuje orientovaný graf $G' = (V', E')$ takto: Vybereme vrchol $v \in V$, množina vrcholů je $V' = V \cup \{a, b\}$ ($a, b \notin V$). Množina hran je $E' = (E \setminus \{(x, v) \mid x \in V\}) \cup \{(x, b) \mid (x, v) \in E\} \cup \{(a, v)\}$.

Pak platí v G existuje hamiltonovský cyklus právě tehdy, když v G' existuje hamiltonovská orientovaná cesta.

10.5 Problém 2-SAT je v \mathcal{P} .

Návod: K formuli φ , která je instancí 2-SAT, sestrojte orientovaný graf G_φ definovaný takto: vrcholy jsou proměnné formule φ a jejich negace; hrana vede z vrcholu $\neg\alpha$ do vrcholu β a z vrcholu $\neg\beta$ do vrcholu α právě tehdy, když 2-SAT obsahuje klauzuli $\alpha \vee \beta$.

Dokažte: φ není splnitelná právě tehdy, když existuje proměnná x taková, že v G_φ existují orientované cesty z x do $\neg x$ a z $\neg x$ do x . Toho využijte k nalezení polynomiálního algoritmu.

10.6 Zkonstruuje polynomiální redukci problému SubsetSum na problém dělení kořisti.

Fakt, že se jedná o polynomiální redukci pečlivě zdůvodněte.

Výsledek. Jedna z redukcí je tato:

Je dána instance I problému SubsetSum, tj. kladná přirozená čísla a_1, a_2, \dots, a_n a přirozené číslo K . Označme $S = \sum_{i=1}^n a_i$. Sestrojíme instanci I' problému dělení kořisti takto:

- If $K = \frac{1}{2}S$, tak $I = I'$.
- If $K > \frac{1}{2}S$, tak I' je $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$, kde $a_{n+1} = 2K - S$.
- If $K < \frac{1}{2}S$, tak I' je $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$, kde $a_{n+1} = S - 2K$.

Pak I je ANO instance SubsetSum iff I' je ANO instance dělení kořisti.

Samostaná práce na příští cvičení

10.7 Zkonstruujte polynomiální redukci problému existence hamiltonovského kružnice na problém existence hamiltonovské neorientované cesty. Fakt, že se jedná o polynomiální redukci pečlivě zdůvodněte.

10.8 Ukažte, že

Problém nezávislých množin se polynomiálně redukuje na problém SAT.

Polynomiální redukci pečlivě popište a zdůvodněte.